A.A. 2015-2016. CORSO DI ALGEBRA 1.
PROFF. P. PIAZZA, E. SPINELLI.
ESERCITAZIONI. FOGLIO SPECIALE 2.

Definizione S.2.1 (Grafo)**.** Un grafo è il dato di una coppia $\mathscr{G} = (V, E)$, dove V è un insieme mentre E è un insieme con una funzione dall'insieme nell'insieme delle coppie non ordinate di punti di V, in formule: $\eta : E \to (V \times V)/ \sim \subseteq \mathcal{P}(V)$ dove $(v, v') \sim (v'', v''')$ se e soltanto se $\{v'' = v'$ e $v''' = v\}$ oppure $\{v'' = v$ e $v''' = v'\}$.
Possiamo pensare ad un elemento $e \in E$ come ad un lato che collega la coppia (non ordinata) di vertici.

Definizione S.2.2. Diremo che $\mathscr{G}' = (V', E')$ è un sottografo di $\mathscr{G} = (V, E)$ se $V' \subseteq V$ ed $E' \subseteq E$ con $\bigcup_{e' \in E'} \eta(e') \subset V'$.

Definizione S.2. 3 (Valenza)**.** Sia $\mathscr{G} = (V, E)$ un grafo. Definiamo la *valenza* di un vertice $v \in V$ come l'ordinale $val(v) = |\{e \in E \mid v \in \eta(e)\}|$.

Definizione S.2.4 (Automorfismi)**.** Un'applicazione biettiva $f : \mathscr{G} \to \mathscr{G}$ è un automorfismo del grafo $\mathscr{G}$ se valgono le condizioni seguenti:
(1) $val(f(v)) = val(v)$, per ogni $v \in V$;
(2) $v \in \eta(e) \Rightarrow f(v) \in \eta(f(e))$, per ogni $e \in E$.
Denoteremo $Aut(\mathscr{G})$ l'insieme degli automorfismi di $\mathscr{G}$.

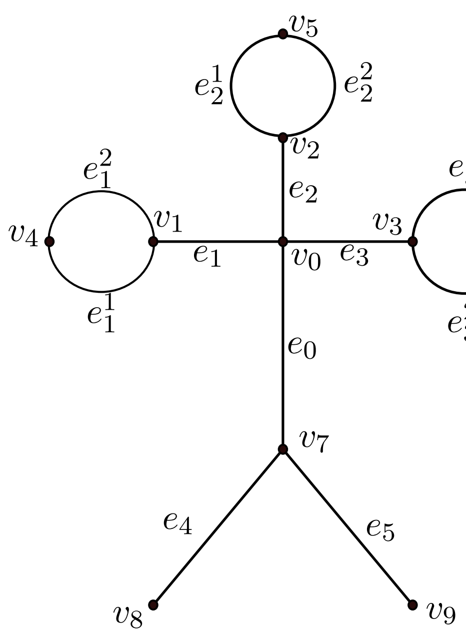

FIGURA 1. Grafo $\mathscr{G}_0$

Esercizio S.2.1. Calcolare la valenza di ogni vertice di $\mathscr{G}_0$.

Esercizio S.2. 2. Sfruttando l'esercizio precedente determinare, $\mathrm{Fix}_{\mathrm{Aut}(\mathscr{G}_0)}$, il sottografo di $\mathscr{G}_0$ che viene fissato (vertice per vertice e lato per lato) da ciascun elemento elemento di $Aut(\mathscr{G}_0)$.

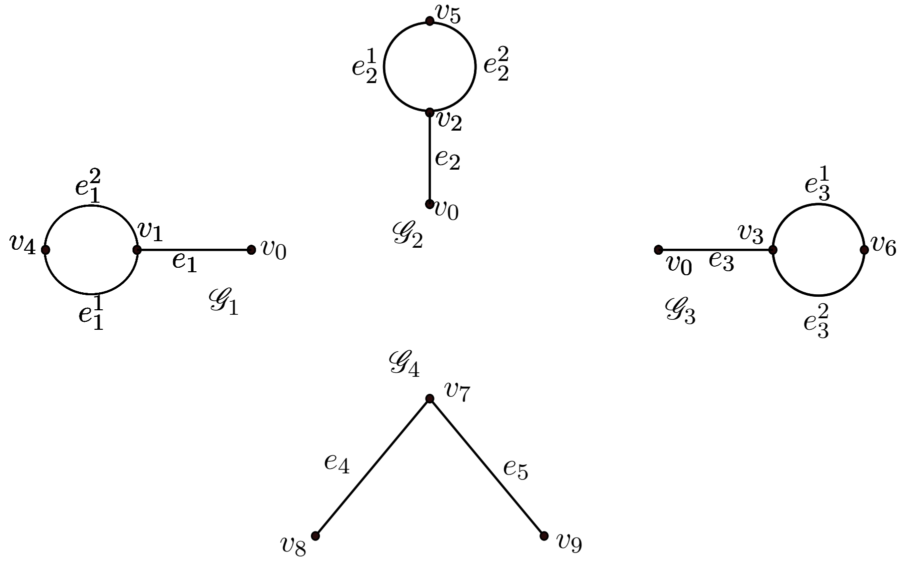

FIGURA 2. I sottografi di $\mathscr{G}_0$

Esercizio S.2.3. Si considerino i sottografi $\mathscr{G}_1, \mathscr{G}_2, \mathscr{G}_3, \mathscr{G}_4$. Sia $f \in Aut(\mathscr{G}_0)$, allora:

(1) $f(\mathscr{G}_1 \cup \mathscr{G}_2 \cup \mathscr{G}_3) = \mathscr{G}_1 \cup \mathscr{G}_2 \cup \mathscr{G}_3$;
(2) $f(\mathscr{G}_4) = \mathscr{G}_4$;

Esercizio S.2.4. Sfruttando i due esercizi precedenti dimostrare che

$$\varphi : Aut(\mathscr{G}_0) \to Aut(\mathscr{G}_1 \cup \mathscr{G}_2 \cup \mathscr{G}_3) \times Aut(\mathscr{G}_4), \qquad \varphi(f) = (f|_{\mathscr{G}_1 \cup \mathscr{G}_2 \cup \mathscr{G}_3}, f|_{\mathscr{G}_4})$$

è un isomorfismo.

Esercizio S.2.5. Determinare il gruppo di automorfismi $Aut(\mathscr{G}_4)$.

Esercizio S.2. 6. Supponiamo che $f \in Aut(\mathscr{G}_0)$ fissi $\mathscr{G}_i$. Allora esso può agire in due modi distinti. Giustificare tale affermazione e specificare quali sono questi due modi.

Esercizio S.2.7. Determinare un omomorfismo iniettivo $\psi_1 : S_3 \to Aut(\mathscr{G}_1 \cup \mathscr{G}_2 \cup \mathscr{G}_3)$.

Esercizio S.2. 8. Determinare un omomorfismo iniettivo $\psi_2 : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to Aut(\mathscr{G}_1 \cup \mathscr{G}_2 \cup \mathscr{G}_3)$ la cui immagine sia un sottogruppo normale di $Aut(\mathscr{G}_1 \cup \mathscr{G}_2 \cup \mathscr{G}_3)$. [*Suggerimento. Sfruttare l'esercizio S.2.6.*]

Esercizio S.2. 9. Siano $R_1 = \psi_2((\bar{1}, \bar{0}, \bar{0}))$, $R_2 = \psi_2((\bar{0}, \bar{1}, \bar{0}))$, $R_3 = \psi_2((\bar{0}, \bar{0}, \bar{1}))$ tre generatori di $\psi_2(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ e denotiamo con $f_\sigma = \psi_1(\sigma)$, per ogni $\sigma \in S_3$. Si osservi che ogni elemento $f \in Aut(\mathscr{G}_1 \cup \mathscr{G}_2 \cup \mathscr{G}_3)$ può essere scritto in modo unico come $f = R_1^{\delta_1} R_2^{\delta_2} R_3^{\delta_3} f_\sigma$ per un opportuno $\sigma \in S_3$ ed opportuni $\delta_i \in \{0, 1\}$. Notare che qui il prodotto è inteso in $Aut(\mathscr{G}_1 \cup \mathscr{G}_2 \cup \mathscr{G}_3)$, stiamo quindi parlando di composizione di applicazioni. [*Suggerimento. Si guardi all'azione di f sull'insieme dei vertici v_1, v_2, v_3 e sulle coppie di lati $\{e_i^1, e_i^2\}_{i=1,2,3}$*]

Esercizio S.2.10. Dimostrare che per ogni $\sigma \in S_3$ e per ogni $i = 1, 2, 3$ vale la seguente relazione:

$$f_\sigma \circ R_i = R_{\sigma(i)} \circ f_\sigma\ .$$

Definizione S.2.5 (Prodotto semidiretto)**.** Siano K, H due gruppi e sia $\varphi : H \to Aut(K)$ un omomorfismo di gruppi. Il *prodotto semidiretto* di H per K tramite φ è il gruppo $G = K \rtimes_\varphi H$ che insiemisticamente è dato dal prodotto cartesiano $K \times H$ ma il cui prodotto è definito come:

$$(k_1, h_1) \cdot (k_2, h_2) = (k_1\, \varphi(h_1)(k_2), h_1\, h_2)$$

Esercizio S.2. 11. Dimostrare che il gruppo $Aut(\mathscr{G}_1 \cup \mathscr{G}_2 \cup \mathscr{G}_3)$ è isomorfo al prodotto semidiretto $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes_\varphi S_3$ dove $\varphi : S_3 \to Aut(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$, $\varphi(\sigma)((\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)) = (\overline{x}_{\sigma(1)}, \overline{x}_{\sigma(2)}, \overline{x}_{\sigma(3)})$. [*Suggerimento. Sfruttare la scrittura " canonica" la cui esistenza è stata provata nell'esercizio* S.2.9.]

Esercizio S.2.12. Utilizzare quanto dimostrato in precedenza per dedurre che

$$Aut(\mathscr{G}_0) \simeq ((\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes_\varphi S_3) \times \mathbb{Z}_2 \,.$$